10.20 Klassifikation orthogonaler Endomorphismen

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum.

Proposition: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f von V gilt $\det(f) = \pm 1$.

Bew.: $f \circ f^* = id_V \Rightarrow 1 = \det(id_V) = \det(f) \cdot \det(f^*) = \det(f) \det(f) = |\det(f)|^2$ qed

Satz: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f von V existiert eine geordnete Orthonormalbasis B von V, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von f die folgende Blockdiagonalgestalt hat:

$$\boxed{{}_B[f]_B = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix}} \quad \text{mit} \quad \boxed{D_k = \begin{cases} \pm 1 & \text{oder} \\ \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix} & \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \\ & \text{und } a_k^2 + b_k^2 = 1. \end{cases}}$$

Gilt weiter $\det(f) = 1$, so kann man alle 1×1-Blockdiagonaleinträge gleich 1 wählen.

Bew.: f normal $\Rightarrow$ Spektralsatz liefert ${}_B[f]_B$ orthogonal.

$\Rightarrow$ alle D_k orthogonal.

$D_k = (\lambda) \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$.

$D_k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Sind zwei $D_k = (-1)$, können wir sie durch den 2×2-Block $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ersetzen

$\Rightarrow$ oBdA höchstens ein $D_k = (-1)$. Außerdem ist $\det(f) = (-1)^{\#\{k \mid D_k = (-1)\}}$. qed.

Definition: Sind alle Blockdiagonaleinträge ausser einem gleich 1, und ist dieser

(a) gleich -1, so heisst f eine *Spiegelung (an einer Hyperebene)*.
(b) gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$, so heisst f eine *Drehung um den Winkel* $\pm \arg(a_k + ib_k)$.

Proposition: Jeder orthogonale Endomorphismus von V ist eine Komposition von Spiegelungen. Insbesondere ist die orthogonale Gruppe $O(n)$ von Spiegelungen erzeugt.

Beweis: $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}_{a^2+b^2=1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix}}$ orthogonal

Char Pol $= X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$\Rightarrow$ Spiegelung. $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ qed.

Definition: Ein orthogonaler Endomorphismus f mit $\det(f) = 1$ heisst *speziell orthogonal.* Die Menge $SO(n) = SO_n(\mathbb{R})$ aller orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1 heisst die *spezielle orthogonale Gruppe vom Grad n*.

Proposition: Jeder spezielle orthogonale Endomorphismus ist eine Komposition von Drehungen. Insbesondere ist die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ von Drehungen erzeugt.

Beweis: Satz 4. qed

$O(1) = \{\pm 1\}$

$SO(1) = \{1\}$

$O(2) = SO(2) \sqcup SO(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a^2+b^2=1 \right\}$ Drehungen.

die ist kommutativ.

Proposition: Jedes Element von SO(3) ist eine Drehung.

Beweis: $_B[f]_B = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & a & b \\ & -b & a \end{array}\right)$ qed.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right) \in SO(4)$ keine einfache Drehung.

Folge: *(„Satz vom Fussball")* In jedem Fussballspiel gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls, die beim Anstoss zur zweiten Halbzeit dieselbe Lage haben wie beim Anstoss zur ersten Halbzeit.

Bemerkung: Dass eine Katze sich in der Luft auf die Füsse drehen kann, hängt unter anderem damit zusammen, dass die Gruppe SO(3) nicht kommutativ ist.

Beispiel: Siehe §10.14.

12 Multilineare Algebra

$\varphi: V_1 \times V_2 \to W$ bilin

$\Rightarrow \varphi(v_1+v_1', v_2+v_2') = \varphi(v_1,v_2) + \varphi(v_1,v_2')$

$+ \varphi(v_1',v_2) + \varphi(v_1',v_2')$

12.1 Multilineare Abbildungen

Definition: Betrachte K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ und W. Eine Abbildung

$$\varphi\colon V_1 \times \ldots \times V_r \to W, \ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto \varphi(v_1, \ldots, v_r),$$

die in jeder Variablen v_i separat linear ist, heisst *multilinear.* Die Menge aller solcher bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W).$$

Proposition: Dies ist ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \ldots \times V_r \to W$.

Beweis: Analog zum Fall $r=1$. qed.

Spezialfall: Für $r = 1$ ist $\mathrm{Mult}_K(V; W) = \mathrm{Hom}_K(V, W)$, vergleiche §5.9. Insbesondere ist $\mathrm{Mult}_K(V; K) = \mathrm{Hom}_K(V, K) = V^\vee$ der Dualraum von V, vergleiche §5.10.

Spezialfall: Für $r = 2$ heisst multilinear auch *bilinear.* Insbesondere ist $\mathrm{Mult}_K(V, V; K)$ der Raum aller Bilinearformen auf V, vergleiche §10.3.

Proposition: *(Funktorialität)* Lineare Abbildungen $f_i\colon V_i' \to V_i$ und $g\colon W \to W'$ induzieren eine lineare Abbildung

$$T\colon \quad \mathrm{Mult}_K(V_1,\ldots,V_r;W) \;\to\; \mathrm{Mult}_K(V_1',\ldots,V_r';W'),$$
$$\varphi \;\mapsto\; g\circ\varphi\circ(f_1\times\ldots\times f_r).$$

$$\begin{tikzcd}
V_1\times\ldots\times V_r \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[d, "g"] \\
V_1'\times\ldots\times V_r' \arrow[u, "f_1 \;\ldots\; f_r"] \arrow[r, "\tilde\varphi"'] & W'
\end{tikzcd}$$

Bew.: $\tilde\varphi$ multilinear $\Rightarrow$ Abbildung wohldefiniert.

$T(\varphi+\psi)=T(\varphi)+T(\psi)$

$T(\lambda\varphi)=\lambda T(\varphi) \longleftarrow \quad \lambda T(\varphi)=\lambda\big(g\circ\varphi\circ(f_1\times\ldots\times f_r)\big)$

$= g\circ(\lambda\varphi)\circ(f_1\times\ldots\times f_r) = T(\lambda\varphi)$ qed.

Proposition: Betrachte Basen B_i von V_i sowie C von W. Betrachte ein System von Koeffizienten $\alpha^c_{b_1,\ldots,b_r}\in K$ für alle $b_i\in B_i$ und $c\in C$ mit der Eigenschaft $\forall b_i\in B_i\colon\ \big|\{c\in C \mid \alpha^c_{b_1,\ldots,b_r}\neq 0\}\big|<\infty$. Dann existiert genau eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1\times\ldots\times V_r\to W$, so dass für alle $b_i\in B_i$ gilt:

$$\boxed{\varphi(b_1,\ldots,b_r) \;=\; \sum_{c\in C}{}' \alpha^c_{b_1,\ldots,b_r}c.}$$

Umgekehrt hat jede multilineare Abbildung $\varphi\colon V_1\times\ldots\times V_r\to W$ diese Gestalt für eindeutige Koeffizienten $\alpha^c_{b_1,\ldots,b_r}$.

Bew.: Für jedes $v_i = \sum'_{b_i\in B_i} \beta_{i,b_i}\cdot b_i \in V_i$ beliebig. Für jedes $\varphi\in \mathrm{Mult}_K(V_1\times\ldots\times V_r, W)$

$$\Rightarrow \varphi(v_1,\ldots,v_r) = \sum_{b_1\in B_1}{}'\cdots\sum_{b_r\in B_r}{}' \beta_{1,b_1}\cdots\beta_{r,b_r}\cdot\varphi(b_1,\ldots,b_r).$$

Für gegebene $\alpha^c_{b_1\ldots b_r}$ wie oben setze $\varphi(v_1,\ldots,v_r) := \sum'_{b_1}\cdots\sum'_{b_r}\beta_{1,b_1}\cdots\beta_{r,b_r}\sum'_{c\in C}\alpha^c_{b_1\ldots b_r}\cdot c$.

Diese Abb. $V_1\times\ldots\times V_r\to W$ ist multilinear. qed

Proposition: Für beliebige $V_1, \ldots, V_r, W$ gilt, mit der Konvention $\infty \cdot 0 = 0$:

$$\dim_K \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) \;=\; \Big(\prod_{i=1}^{r} \dim_K(V_i^\vee)\Big) \cdot \dim_K(W).$$

Bew.: alle $d_i := \dim(V_i) < \infty$ und $e := \dim(W) < \infty$

$\Rightarrow \mathbb{K}^{d_1 \cdots d_r e} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$, $(\alpha^c_{b_1 \ldots b_r})_{b_1, \ldots, b_r, c} \mapsto \varphi$ wie oben Isomorphismus. $\Rightarrow \dim = d_1 \cdots d_r \cdot e$. qed.

Folge:

(a) Es ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) \neq 0$ genau dann, wenn alle V_i, $W \neq 0$ sind.

(b) Es ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) \neq 0$ und endlich-dimensional genau dann, wenn alle V_i, $W \neq 0$ und endlich-dimensional sind.

12.2 Symmetrische und alternierende Abbildungen

Definition: Eine multilineare Abbildung $\varphi\colon V^r \to W$ heisst *symmetrisch*, wenn gilt

$$\forall v_1, \ldots, v_r \in V \;\forall \sigma \in S_r : \;\varphi(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma r}) = \varphi(v_1, \ldots, v_r).$$

Sie heisst *alternierend*, wenn gilt

$$\forall v_1, \ldots, v_r \in V\colon \;\big(\exists i \neq i' : \;v_i = v_{i'}\big) \longrightarrow \varphi(v_1, \ldots, v_r) = 0.$$

Die Menge aller solcher bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Sym}^r_K(V, W) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Alt}^r_K(V, W).$$

Proposition: Dies sind Unterräume von $\mathrm{Mult}_K(V, \ldots, V; W)$.

Bemerkung: Da jede Permutation ein Produkt von Transpositionen benachbarter Indizes ist, ist φ symmetrisch genau dann, wenn gilt

$$\forall v_1, \ldots, v_r \in V \;\forall\, 2 \leqslant i \leqslant r : \;\varphi(v_1, \ldots, v_{i-2}, v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r) = \varphi(v_1, \ldots, v_r).$$